Edukacja 2020, 3(154), 23–39
DOI 10.24131/3724.200302
ISSN 0239-6858

Kiedy wizualizacja nie wspiera rozumowania – przypadek pewnego zadania z matematyki

Kamil Palusiński*
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń, Polska

W dobie dyskusji nad metodami i efektami nauczania matematyki w szkole, warto przyjrzeć się rodzajom błędów popełnianych przez uczniów w trakcie procesu nauczania – uczenia się matematyki. Punktem wyjścia do analizy jest w tym artykule prześledzenie jednej z sytuacji, kiedy to proces wizualizacji, jako jeden z procesów kognitywnych zaangażowanych w naukę geometrii, nie jest procesem wspierającym rozumowanie formalne ucznia. Analizie poddajemy rozwiązania pewnego zadania przez uczniów dwóch klas szkoły średniej na przestrzeni dwóch lat. Badamy stopień potwierdzenia hipotezy mówiącej, że wykonanie rysunku pomocniczego nieuwzględniającego warunków zadania prowadzi do zmiany charakteru rysunku, co skutkuje błędnym rozwiązaniem zadania. Rozwiązania uczniowskie potwierdzają empirycznie tę hipotezę. Wskazujemy również na możliwe powiązanie popełniania tego typu błędów z płcią ucznia.

Słowa kluczowe: dydaktyka matematyki, nauczanie matematyki w szkole średniej, problemy w nauczaniu geometrii, procesy kognitywne w nauczaniu geometrii, rola rysunku w nauczaniu geometrii.

Artykuł podzielony został na kilka części. We wstępie omawiamy wzajemne zależności między procesami kognitywnymi zaangażowanymi w proces nauczania – uczenia się geometrii, rolę jaką może pełnić rysunek w rozwiązywaniu zadań geometrycznych oraz wniosek wynikający z wyżej wymienionych, który wyrażamy w sformułowaniu hipotezy ogólnej. W kolejnej części – Badanie empiryczne – scharakteryzowana została grupa badawcza oraz omówione narzędzie do pomiaru opisanego w artykule efektu (konkretne zadanie matematyczne) poprzez sformułowanie hipotezy szczegółowej, podanie metody badawczej i jej wyników. Następnie podane zostaną wnioski z analizy zebranych danych, a w ostatniej części podsumowanie zawierające odpowiedź na postawioną hipotezę oraz uwagi do dalszych badań.

Procesy kognitywne w nauczaniu matematyki

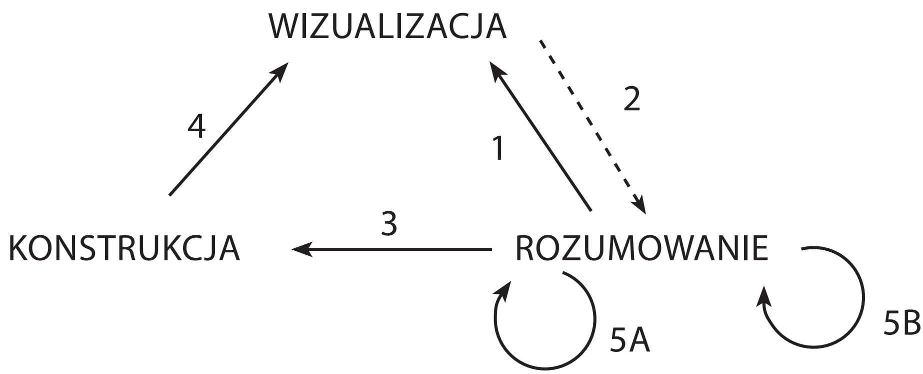
Według Raymonda Duvala (Duval, 1998) geometria angażuje trzy rodzaje procesów poznawczych, które odpowiadają następującym funkcjom epistemologicznym:

1. procesowi wizualizacji, który odpowiada za reprezentacje przestrzenne służące zobrazowaniu twierdzenia (wyrażenia), heurystyczne badanie złożonej sytuacji, ogólny rzut oka oraz subiektywną weryfikację,
2. procesowi konstrukcji poprzez narzędzia, dzięki czemu może powstać model, w którym

*E-mail: kamilpalusinski@mat.umk.pl
ORCID: 0000-0002-5097-0924

czynności na reprezentancie i obserwowalne rezultaty są powiązane z reprezentowanymi obiektami matematycznymi,
3. rozumowaniu w powiązaniu z procesem dyskursu dla poszerzenia wiedzy, dowodzenia i wyjaśniania.

Te różne procesy mogą być angażowane osobno, jednakże są ze sobą ściśle powiązane, co Duval reprezentuje za pomocą grafu:



Rysunek 1. Wzajemne wspieranie procesów kognitywnych w nauczaniu geometrii według R. Duvala.

Wizualizacja jest przez Duvala rozumiana jako identyfikacja obiektów i ich układów na płaszczyźnie i w przestrzeni. Jest ona zależna od określonych praw, które z kolei są niezależne od sposobu konstrukcji bądź od dyskursu.

Konstrukcja to używanie narzędzi takich jak linijka i cyrkiel czy gotowe oprogramowanie komputerowe.

Rozumowanie wyraża się poprzez używanie:
1. naturalnego języka dla nazywania, opisu bądź argumentacji (5A),
2. przesłanek o statusie teoretycznym: definicji, twierdzeń itp. dla dedukcyjnej organizacji dyskursu (5B).

Każda strzałka reprezentuje sposób, w jaki jeden rodzaj procesu wspiera inny. Strzałka 2 jest zaznaczona przerywaną linią ponieważ wizualizacja nie zawsze wspiera rozumowanie (Duval, 1998). Ten brak wsparcia wynikać może z dwóch sposobów patrzenia na rysunek w geometrii, o czym mówimy w następnej części.

Dwoista natura rysunku w geometrii

Aby wyjaśnić rolę, jaką rysunek może pełnić w procesie rozwiązywania problemów geometrycznych zacytujmy Stefana Turnaua:

> W nauce geometrii łatwo o pomylenie przedmiotu rozważań tej nauki, jakim są pojęcia abstrakcyjne, z ich konkretnymi reprezentacjami (rysunkami, modelami). Rysunek lub model poglądowy może pełnić jedną z dwu istotnie różnych funkcji:
> 1. konkretnego przedmiotu badań i obserwacji empirycznych,
> 2. symbolicznego przedstawienia określonych figur, własności lub relacji (Turnau, 1977, s. 64).

Błędy uczniów podczas rozwiązywania zadań mogą więc wynikać z ich sposobu patrzenia na dany rysunek. Kiedy rysunek pełni rolę konkretu, a uczeń będzie traktować go jako symbol, może zapędzić się w próby ścisłego rozumowania, które zawierać będzie błędy. Z kolei, gdy zamiast zamierzonego rozumienia symbolicznego, potraktuje on rysunek jako konkret, to łatwo wyobrazić sobie sytuacje, w których uczeń korzysta z założeń widocznych na rysunku, a nie wynikających z treści zadania, np. równoboczności trójkąta, równoległości prostych, przecinania się odcinków/prostych w jednym punkcie.

W tym miejscu przytoczmy słowa Zofii Krygowskiej, która widziała problemy nauczania geometrii również i w tym jej aspekcie:

> Fakt, że geometria elementarna jest teorią związaną ściśle z prostymi intuicjami przestrzennymi i doświadczeniem może spowodować nieporozumienia metodologiczne, ale z drugiej strony właśnie ten jej graniczny charakter sprzyja głębszemu zrozumieniu dedukcji, gdyż w tych warunkach poprawna dedukcja wymaga dużej dyscypliny myśli. Uczeń zaczyna rozumieć np. formalny sens definicji, gdy intuicyjne ujęcie definiowanego obiektu przekracza własności wymienione w definicji. Zaczyna on pojmować istotę dowodu wtedy, gdy musi świadomie przeciwstawiać obraz poglądowy, pewność intuicyjną – oczywistości rozumowania (Krygowska, 1972, s. 146–147).

Widzimy więc, że odpowiednie nauczanie geometrii niesie za sobą wiele korzyści, ale zawiera też wiele miejsc trudnych, z punktu widzenia metodyki nauczania matematyki, a co za tym idzie, miejsc trudnych dla nauczyciela.

O kształcącej roli rysunku w nauczaniu geometrii możemy przekonać się analizując wyniki badania Hansa Aebli z 1949 r. Eksperyment dotyczył wprowadzenia obliczania obwodu i pola prostokąta. Jedna z dwóch równoległych klas nabywała tych umiejętności poprzez stopniowe konstruowanie operacji w samodzielnych badaniach, używając modeli, np. aby określić, na której łące otrzymamy większy zbiór siana, uczniowie wycinali prostokąty i przykładali jeden do drugiego. Sami wpadli na pomysł, aby jedną z powierzchni prostokąta pociąć na kwadraty uzyskując jednostkę pola (Aebli, 1982). Wyniki badania pokazują, że taka eksperymentalna metoda, związana ściśle z modelami geometrycznymi dała bardzo dobry efekt wśród słabszej podgrupy uczniów. Iloraz błędnych operacji w teście końcowym wynosił bowiem $^{21}/_{302}$ w klasie eksperymentalnej, a $^{82}/_{220}$ w klasie uczącej się tradycyjne (Aebli, 1982).
Turnau w swoich zaleceniach dotyczących nauczania geometrii stwierdza:

> Uczeń powinien być stawiany zawsze w jasnej sytuacji metodologicznej: powinien wiedzieć, czy ma do rozwiązania problem dotyczący abstrakcyjnych pojęć, czy zadanie rysunkowe, oraz jaką funkcję pełni towarzyszący temu problemowi rysunek, co powinno być jednym z punktów rozważanych przez nauczyciela podczas wyboru treści oraz sposobu nauczania (Turnau, 1977, s. 64).

Warto zwrócić jeszcze uwagę na problem, który pojawia się przy symbolicznym traktowaniu rysunku, w sytuacji, gdy uczeń tworzy tzw. rysunek pomocniczy – jak dokładny powinien być taki rysunek? Turnau podaje następujące zalecenia: „Dokładność rysunku powinna być ściśle uzależniona od jego funkcji w procesie dydaktycznym lub matematycznej aktywności ucznia.[…] Na ogół odręczny szkic rysunkowy nie zakłóca procesu poznawczego, a w razie potrzeby zawsze może być zastąpiony rysunkiem dokładniejszym" (Turnau, 1977, s. 62). Wyrażenie „na ogół" użyte przez prof. Turnaua nie jest bez znaczenia. Diagram wspierania się procesów poznawczych w nauczaniu geometrii wskazuje nam, że sytuacje, które do tego ogółu nie należą, mają miejsce. Dokładność rysunku pomocniczego nie jest więc elementem, który można tak po prostu pominąć w procesie nauczania – uczenia się matematyki:

> O konieczności dostosowywania dokładności rysunku do aktualnej potrzeby uczniowie powinni wiedzieć i z tego korzystać. Nauczyciel zaś winien pamiętać, że nie to jest ważne, co i jak uczeń rysuje, ale co przy tym myśli; a tego nieraz łatwiej dowiedzieć się z odręcznego szkicu niż z czysto wykreślonego rysunku (Turnau, 1977, s. 63).

Problem mylenia abstrakcyjnego pojęcia matematycznego z jego graficzną interpretacją nie jest jedynie domeną uczniów. O tym, że występuje on również wśród (przyszłych) nauczycieli matematyki pisze Czajkowska (Czajkowska, 2018). Przeprowadzone przez nią badanie pokazało, że część studentów specjalności nauczycielskiej zamiast podania definicji trapezu, wykonywała jego rysunek utożsamiając definicję z obrazową reprezentacją pojęcia (Czajkowska, 2018, s. 63). Dodatkowo autorka porusza w artykule problem modyfikowania źle ukształtowanych pojęć geometrycznych. Przytoczmy słowa podsumowujące tę część jej badań:

> Zajęcia z dydaktyki matematyki tylko pozornie wpłynęły na znajomość i rozumienie omawianych trzech pojęć. Pomimo że bezpośrednio po ich zakończeniu wielu studentów potrafiło właściwie ocenić definicje podane przez innych i przytaczało poprawne definicje, to jednak zostały one zapamiętane na krótko. A zatem studenci nie nabyli odpowiednio dużo osobistych doświadczeń, aby zmodyfikować skrypty wytworzone w trakcie nauki szkolnej. Po kilku miesiącach wielu z nich odpowiadało i działało tak samo, jak w pierwszym etapie. Warto zauważyć, że wśród badanych studentów byli tacy, którzy dysponowali skryptami kształtowanymi w przedszkolu lub w szkole podstawowej, ale byli też tacy, którzy wykazywali się błędnie wytworzonymi skryptami. Analizując wypowiedzi studentów, odnosiłam wrażenie, że ich poznawanie pojęć zatrzymało się w pewnym momencie, gdy pojęcia te nie były jeszcze w pełni ukształtowane. Studentom utrudniało lub ułatwiało odtworzenie definicji to, do jakiego stopnia dojrzałe matematycznie pojęcie było niezgodne lub zgodne z wytworzoną jego myślową reprezentacją (Czajkowska, 2018, s. 66).

Sformułowanie hipotezy ogólnej

Mając na uwadze model procesów kognitywnych zaangażowanych w proces nauczania – uczenia się matematyki (w tym przypadku geometrii) oraz niejednoznaczną rolę rysunku w geometrii, formułujemy następującą hipotezę ogólną:

> **H:** *Wykonanie rysunku poglądowego nieuwzględniającego założeń zadania prowadzi do zmiany charakteru rysunku pomocniczego i jest wizualizacją niewspierającą procesu rozumowania ucznia podczas rozwiązywania konkretnego problemu matematycznego.*

Badanie empiryczne

Charakterystyka grupy badawczej

Badanymi osobami byli uczniowie klasy trzeciej liceum ogólnokształcącego (18–19 lat) o profilu matematyczno-fizyczno-informatycznym realizujący tzw. program uniwersytecki, który oprócz realizowania podstawy programowej w zakresie rozszerzonym wprowadza uczniów w tematy i metody matematyki wyższej, daleko wykraczając poza zwyczajowo realizowane w liceach ogólnokształcących programy. Badanie odbyło się dwa razy: w roku szkolnym 2017/2018 oraz 2018/2019 na dwóch grupach badawczych, których liczebność reprezentuje Tabela 1.

Tabela 1
Liczebność badanej grupy w poszczególnych latach

	2017/2018	2018/2019	w obu latach
chłopcy	12	20	32
dziewczęta	10	3	13
razem	22	23	**45**

Opis badania

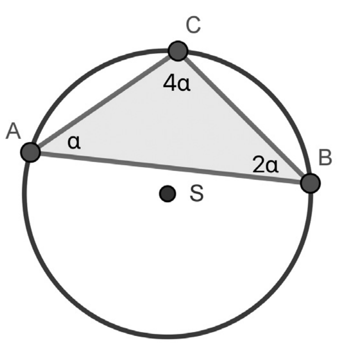
Badanie przeprowadzone było podczas jednej z powtórzeniowych prac klasowych. Uczniowie więc w standardowych warunkach szkolnych rozwiązywali sześć zadań, z których jedno sprawdzało zależność pomiędzy wizualizacją a rozumowaniem. Na rozwiązanie wszystkich postawionych problemów mieli 90 minut.

Wspomniane zadanie to zadanie pochodzące z jednego z majowych egzaminów dojrzałości o następującej treści:

> Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku S. Kąty wewnętrzne CAB, ABC i BCA tego trójkąta są równe, odpowiednio, α, 2α i 4α. Wykaż, że trójkąt ABC jest rozwartokątny i udowodnij, że miary wypukłych kątów środkowych ASB, ASC i BSC tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny (Centralna Komisja Egzaminacyjna, 2014, s. 10).

Przykładowe rozwiązania zadania

Pokażemy teraz przykładowe, opracowane przez autora tekstu, poprawne rozwiązanie zadania. Zacznijmy od rysunku pomocniczego:



Rysunek 2. Rysunek pomocniczy do poprawnego rozwiązania zadania – wizualizacja wspierająca rozumowanie ucznia.

Ponieważ mamy udowodnić, że trójkąt ten jest rozwartokątny, to środek okręgu opisanego na tym trójkącie będzie znajdował się poza trójkątem.

Z twierdzenia o sumie miar kątów w trójkącie wynika, że

$\alpha + 2\alpha + 4\alpha = 180^{\circ}$,

A więc otrzymujemy, że

$\alpha = 25\frac{5}{7}$.

Wtedy
$4\alpha = 102\frac{6}{7}^{\circ} > 90^{\circ}$,

Czyli kąt $\angle ACB$ jest kątem rozwartym.

Ponieważ kąty $\angle BSC$ i $\angle BAC$ są kątami opartymi na tym samym łuku BC oraz kąt $\angle BSC$ jest kątem środkowym, a $\angle BAC$ wpisanym w okrąg, to z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym wynika, że

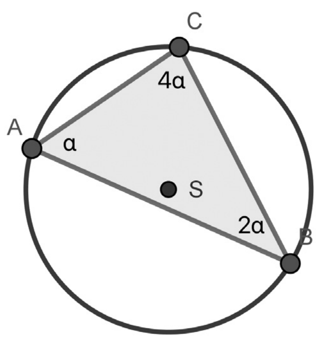
$|\angle BSC| = 2\,|\angle BAC| = 2\alpha$
Tak samo otrzymujemy, że

$|\angle ASC| = 2\,|\angle ABC| = 4\alpha$.

Mamy również
$|\angle ASB| = |\angle ASC| + |\angle BSC| = 4\alpha + 2\alpha = 6\alpha$.

Stąd ciąg $(|\angle ASB|, |\angle ASC|, |\angle BSC|) = (6\alpha, 4\alpha, 2\alpha)$, a więc jest ciągiem arytmetycznym o różnicy równej -2α.

Rozważmy teraz przykładowe błędne uczniowskie rozwiązanie tego zadania.
Zacznijmy od rysunku pomocniczego.



Rysunek 3. Rysunek pomocniczy do błędnego rozwiązania zadania – wizualizacja niewspierająca rozumowania ucznia.

Rozwartokątność trójkąta jest udowodniona w ten sam, bądź analogiczny sposób – część uczniów, których prace zostały poddane analizie, nie oblicza wartości α, ale szacuje, że skoro $7\alpha = 180^\circ$, to

$\frac{4}{7}\alpha = \frac{4}{7} \cdot 180^\circ > \frac{4}{8}\, 180^\circ = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$.

Następnym krokiem jest obliczenie miar kątów środkowych ASB, ASC i BSC.
Tak jak poprzednio otrzymane są wartości

$|\angle ASC| = 4\alpha$ oraz $|\angle BSC| = 2\alpha$.

Dalej, ponieważ $\angle ASB$ i $\angle ACB$ są oparte na tym samym łuku, to

$|\angle ASB| = 2|\angle ACB| = 8\alpha$.

Powstały ciąg jest więc postaci

$(|\angle ASB|, |\angle ASC|, |\angle BSC|) = (8\alpha, 4\alpha, 2\alpha)$.

Nie jest to jednak ciąg arytmetyczny. Błąd w tego typu rozwiązaniach uczniowskich polega na odczytaniu informacji o wzajemnym położeniu kątów ASB i ACB z rysunku, a nie z treści zadania, co wnioskujemy na podstawie tego, że każdy uczeń, który podjął się rozwiązania tego problemu, wykonał ilustrację treści zadania. Wykonany rysunek pomocniczy nie uwzględnia rozwartokątności trójkąta ACB, a wręcz przedstawia go jako trójkąt ostrokątny. Jeżeli jednak trójkąt jest ostrokątny, to środek okręgu S znajduje się wewnątrz trójkąta ACB. I właśnie to założenie sprawia, że otrzymujemy ciąg, który nie jest arytmetyczny.

Sformułowanie hipotezy szczegółowej

Przykładowe rozwiązania, które przytoczone zostały w poprzednim punkcie, prowadzą nas do wysłowienia następującej hipotezy szczegółowej:

> **H_0**: *Wykonanie rysunku pomocniczego nieuwzględniającego rozwartokątności trójkąta prowadzi do zmiany charakteru rysunku pomocniczego i jest wizualizacją prowadzącą do błędnego rozwiązania zadania.*

Pozytywne zweryfikowanie hipotezy **H_0** będzie więc przesłanką, ku prawdziwości hipotezy **H**, która wymaga daleko bardziej złożonych badań i weryfikacji niż hipoteza **H_0**. Weryfikacja hipotezy **H_0** stanowi zatem swego rodzaju badanie wstępne do badań właściwych nad hipotezą **H**.

Weryfikacji hipotezy **H_0** poświęcona będzie dalsza część artykułu.

Charakterystyka typu problemu badawczego i metody badawczej

Zaczniemy od próby zaklasyfikowania naszego badania do jednego z typów problemów badawczych według rozróżnienia zaproponowanego przez Wandę Nowak – Tabela 2:

Tabela 2

Zróżnicowanie problemów badawczych ze względu na rodzaj zmiennej określającej „działanie" D, „efekty" E i „warunki" W występowania tych zjawisk

Przypadek	Działanie D	Efekty E	Warunki W	Problem	
				Ogólna formuła	Schemat
I	dane	niewiadome	ustalone	Jakie E są następstwem D w warunkach W?	$D \xrightarrow{W} ?$
II	niewiadome	dane	ustalone	Jakie D wywołuje E w warunkach W?	$? \xrightarrow{W} E$
III	dane	dane	niewiadome	W jakich warunkach W zachodzi: D wywołuje E?	$D \xrightarrow{?} E$

Źródło: Opracowanie własne za: Nowak, 1981, s. 71.

Ponieważ chcemy zbadać, które etapy rozwiązania zadania potwierdzają efekt niewspierającej wizualizacji, to w powyższym rozróżnieniu nasze badanie byłoby badaniem typu III, przy zmiennych:

1. Działanie D – rozwiązywanie zadania,
2. Efekt E – proces wizualizacji nie wspiera rozumowania,
3. Warunki W – realizacje kolejnych etapów rozwiązywania zadania.

Przykładowe rozwiązanie zadania pozwala nam na łatwe sformułowanie wskaźników $\mathbf{W}_i$, które składają się na poszukiwaną wartość zmiennej **W** w naszym badaniu.
Badane wskaźniki:

1. $\mathbf{W}_1$: Podjęcie próby rozwiązania zadania.
2. $\mathbf{W}_2$: Wykonanie rysunku do zadania.
3. $\mathbf{W}_3$: Udowodnienie, że trójkąt jest rozwartokątny.
4. $\mathbf{W}_4$: Wykonanie rysunku uwzględniającego rozwartokątność trójkąta.
5. $\mathbf{W}_5$: Poprawny dowód arytmetyczności ciągu.

Poszukiwane warunki **W** są więc piątkami uporządkowanymi

$$\mathbf{W=(W1, W2, W3, W4, W5)},$$

gdzie każdy ze wskaźników $\mathbf{W}_i$ przyjmuje jedną z wartości 0 lub 1, które interpretujemy następująco:

$\mathbf{W}_i$=0 *oznacza, że czynność nie została wykonana lub została wykonana błędnie,*
$\mathbf{W}_i$=1 *oznacza, że czynność została wykonana (poprawnie).*

W przypadku gdy uczeń wykonał jeden rysunek pomocniczy, to wartości wskaźników $\mathbf{W}_2$ i $\mathbf{W}_4$ przypisujemy w następujący sposób:

- jeśli rysunek nie uwzględniał rozwartokątności trójkąta, to $\mathbf{W}_2=1$, $\mathbf{W}_4=0$,
- jeśli rysunek uwzględniał rozwartokątność trójkąta, to $\mathbf{W}_2=1$, $\mathbf{W}_4=1$.

Zauważmy, że przyjęta powyżej zasada wartościowania wskaźników $\mathbf{W}_2$ oraz $\mathbf{W}_4$ prowadzi w konsekwencji do utożsamienia rozwiązania, w którym pojawiły się dwa rysunki pomocnicze (jeden nieuwzględniający założenia o rozwartokątności i jeden uwzględniający) z rozwiązaniem z jednym rysunkiem pomocniczym (uwzględniającym rozwartokątność trójkąta).

W Tabelach 3, 4, 5 przedstawiamy poziom każdego ze wskaźników z uwzględnieniem roku badania oraz płci.

Tabela 3
Wartości badanych wskaźników w pierwszym roku badania

wskaźnik	**ch**	**%***	**dz**	**%****	**razem**	**%*****
$\mathbf{W}_1$	12	100	9	90	21	**95,45**
$\mathbf{W}_2$	12	100	9	90	21	**95,45**
$\mathbf{W}_3$	10	83,33	9	90	19	**86,36**
$\mathbf{W}_4$	5	41,67	8	80	13	**59,10**
$\mathbf{W}_5$	3	25,00	7	70	10	**45,45**

*procent spośród chłopców, **procent spośród dziewcząt, ***procent spośród wszystkich biorących udział

Tabela 4
Wartości badanych wskaźników w drugim roku badania

wskaźnik	**ch**	**%***	**dz**	**%****	**razem**	**%*****
$\mathbf{W}_1$	20	100	3	100	23	**100**
$\mathbf{W}_2$	20	100	3	100	23	**100**
$\mathbf{W}_3$	19	95,00	3	100	22	**95,65**
$\mathbf{W}_4$	9	45,00	1	33,33	10	**43,48**
$\mathbf{W}_5$	5	25,00	1	33,33	6	**26,10**

*procent spośród chłopców, **procent spośród dziewcząt, ***procent spośród wszystkich biorących udział

Tabela 5
Wartości badanych wskaźników w obu latach badania

wskaźnik	ch	%*	dz	%**	razem	%***
W_1	32	100	12	92,31	44	**97,78**
W_2	32	100	12	92,31	44	**97,78**
W_3	29	90,63	12	92,31	44	**97,78**
W_4	14	43,75	9	69,23	23	**51,11**
W_5	8	25,00	8	61,54	16	**35,56**

*procent spośród chłopców, **procent spośród dziewcząt, ***procent spośród wszystkich biorących udział

Zauważmy, że poprawne pełne rozwiązanie zadania odpowiada ciągowi $\mathbf{W}^r$=(1,1,1,1,1), a więc uczeń po podjęciu próby rozwiązania zadania wykonuje rysunek pomocniczy uwzględniający warunki zadania, przeprowadza dowód rozwartokątności trójkąta i dowodzi arytmetyczności ciągu. Oczywiście można łatwo wyobrazić sobie sytuację, w której uczeń poprawnie rozwiązuje zadanie bez sporządzenia żadnego rysunku (wówczas oba wskaźniki $\mathbf{W}_2$ oraz $\mathbf{W}_4$ są równe zeru) bądź z rysunkiem niespełniającym warunku rozwartokątności trójkąta (wtedy $\mathbf{W}_2$=1, a $\mathbf{W}_4$=0). Rozwiązaniom takim odpowiadałyby odpowiednio ciągi **W**=(1,0,1,0,1) oraz **W**=(1,1,1,0,1). Nie pojawiły się one jednak w analizowanych pracach, dlatego rozważamy tylko jeden ciąg odpowiadający pełnemu rozwiązaniu zadania.

Z kolei rozwiązanie, które potwierdza hipotezę $\mathbf{H}_0$ to rozwiązanie, w którym uczeń po podjęciu próby rozwiązania zadania wykonuje rysunek nieuwzględniający rozwartokątności trójkąta. W przypadku tym uczeń dowodzi, że trójkąt jest w istocie rozwartokątny bądź pomija ten krok. Ciąg potwierdzający hipotezę ma zatem postać $\mathbf{W}^p$=(1,1,1,0,0) lub $\mathbf{W}^{p'}$=(1,1,0,0,0).

Nasza hipoteza jest falsyfikowalna. Zauważmy, że fałszywość hipotezy $\mathbf{H}_0$ zostałaby wykazana, gdyby uczeń po podjęciu próby rozwiązania zadania wykonał rysunek nieuwzględniający rozwartokątności trójkąta, a mimo tego przeprowadził poprawny dowód arytmetyczności ciągu. Udowodnienie, że trójkąt jest rozwartokątny jest tutaj bez znaczenia, więc odpowiednie piątki uporządkowane to $\mathbf{W}^f$=(1,1,1,0,1) lub $\mathbf{W}^{f'}$=(1,1,0,0,1). Są to oczywiście kolejne przykłady poprawnych rozwiązań (bez rysunku pomocniczego). Zobaczymy później, że nie wystąpiły one jednak pośród analizowanych prac (zob. Tabela 6, Tabela 7, Tabela 8).

Wszystkie pozostałe piątki składają się na wskaźnik $\mathbf{W}^b$, który zlicza liczbę błędnych (w tym i niepełnych rozwiązań). Są to następujące piątki: (1,1,1,0,0), (1,1,1,1,0), (1,1,0,0,0), (1,1,0,1,0). (0,0,0,0,0). Wyszczególniamy w nim jedną specjalną wartość $\mathbf{W}^n$=(0,0,0,0,0), a więc brak podejścia do rozwiązania zadania.

Wprowadzamy dwa wzory odnoszące się do badanych wskaźników. Jeden z nich bada trudność zadania (**T**), a drugi będzie wskazywał na stopień potwierdzenia hipotezy (**P**):

$$T = \frac{W^b}{W^r + W^b} \times 100\%$$

$$P = \frac{W^p + W^{p'}}{W^p + W^{p'} + W^f + W^{f'}} \times 100\%$$

We wzorze (1) wskaźniki $\mathbf{W}^{f}$ oraz $\mathbf{W}^{f'}$ zaliczamy do $\mathbf{W}^{r}$ ponieważ są to poprawne rozwiązania zadania. Wskaźnik **T** to iloraz błędnych rozwiązań oraz wszystkich rozwiązań zadania w badanych grupach uczniów wyrażony w procentach. Możemy więc powiedzieć, że oddaje stopień trudności zadania w badanej grupie. Z kolei wskaźnik **P** mierzy odsetek rozwiązań zawierających błędną wizualizację (czyli potwierdzających hipotezę $\mathbf{H}_0$) wśród rozwiązań potwierdzających i falsyfikujących hipotezę szczegółową $\mathbf{H}_0$.

Dodatkowo będziemy również badać indeks korelacji **I**, aby zbadać, czy potwierdzenie hipotezy $\mathbf{H}_0$ jest powiązane z płcią ucznia. Posłużymy się do tego zaproponowanymi przez Borisa Kozuha wzorami (Kozuh, 2011, s. 56, 68):

$$I = \frac{\sigma^2_{wyjaśniona}}{\sigma^2_{całkowita}}$$

$$\sigma^2_{całkowita} = \sigma^2_{wyjaśniona} + \sigma^2_{niewyjaśniona}$$

Indeks I wskazuje, czy wykonanie błędnej wizualizacji (i w konsekwencji niepoprawne rozwiązanie zadania) koreluje z płcią ucznia. Dokładniej, wskazuje z jaką siłą płeć ucznia oddziałuje na wykonanie przez niego błędnej wizualizacji. Wartość indeksu I to liczba z przedziału od 0 do 1, gdzie 0 oznacza brak korelacji, a 1 oznacza, że korelacja jest najsilniejsza, co w naszym przypadku oznacza, że płeć byłaby jedynym czynnikiem wpływającym na wykonanie niewspierającej wizualizacji.

W Tabelach 6, 7, 8 podajemy ilościowy i procentowy udział ciągów $\mathbf{W}^{p}$, $\mathbf{W}^{p'}$, $\mathbf{W}^{f}$, $\mathbf{W}^{f'}$ w zebranych danych.

Tabela 6

Liczebność ciągów potwierdzających i falsyfikujących w pierwszym roku badania

Ciąg	Liczba	%
$\mathbf{W}^{p}$	8	**36,36**
$\mathbf{W}^{p'}$	0	**0**
$\mathbf{W}^{f}$	0	**0**
$\mathbf{W}^{f'}$	0	**0**

Tabela 7

Liczebność ciągów potwierdzających i falsyfikujących w drugim roku badania

Ciąg	Liczba	%
$\mathbf{W}^{p}$	13	**56,52**
$\mathbf{W}^{p'}$	0	**0**
$\mathbf{W}^{f}$	0	**0**
$\mathbf{W}^{f'}$	0	**0**

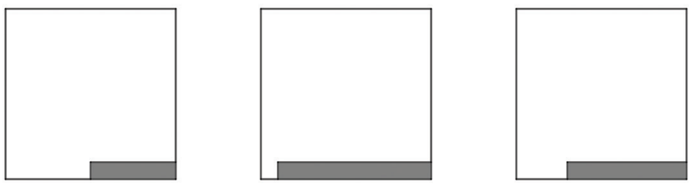
Tabela 8

Liczebność ciągów potwierdzających i falsyfikujących w obu latach badania

Ciąg	Liczba	%
$\mathbf{W^p}$	21	**46,67**
$\mathbf{W^{p'}}$	0	**0**
$\mathbf{W^f}$	0	**0**
$\mathbf{W^{f'}}$	0	**0**

Na podstawie Tabel 6, 7, 8 możemy wysnuć wniosek, że liczba osób, które wykonały niewspierającą wizualizację wzrosła w porównaniu z pierwszym rokiem badania (zob. wartość wskaźnika W^p i $W^{p'}$). W pierwszym roku badania było to 8 osób, w drugim już 13, co stanowi odpowiednio 36,36% oraz 56,52% wszystkich uczniów. Żaden z uczniów, zarówno w pierwszym, jak i drugim roku badania, nie przeprowadził poprawnego rozwiązania zadania, wykonując rysunek nieuwzględniający rozwartokątności trójkąta (wartości wskaźników W^f i $W^{f'}$ są równe zeru).

Odnotujmy również następujące diagramy ilustrujące odsetek chłopców i dziewcząt w przypadkach ciągów potwierdzających naszą hipotezę [ciągi $\mathbf{W^p}$=(1,1,1,0,0) oraz $\mathbf{W^{p'}}$=(1,1,0,0,0)]:



Rysunek 4. Podział uczniów, którzy wykonali niewspierającą wizualizację ze względu na płcie w kolejnych latach badania (od lewej): pierwszy rok: dziewczęta 5% – 1 osoba, chłopcy 95%; – 7 osób; drugi rok: dziewczęta 9% – 2 osoby, chłopcy 91% – 11 osób; łącznie dziewczęta 7% – 3 osoby, chłopcy 93% – 18 osób.

Badamy również indeks korelacji płci z wystąpieniem niewspierającej wizualizacji. W tym celu obliczamy wariancje dla grup chłopców – σ^2_{ch}, dziewcząt – σ^2_{dz} i wszystkich uczniów łącznie – $\sigma^2_{całkowita}$. Ponieważ 18 chłopców spośród 32 w obu latach badania wykonało niewspierającą wizualizację, to średnia arytmetyczna jest równa $^{18}/_{32} \approx 0,5625$. Stąd

$$\sigma^2_{ch} = \frac{18 \cdot 0,4375^2 + 14 \cdot 0,5625^2}{32} \approx 0,25$$

Podobnie obliczamy σ^2_{dz} oraz $\sigma^2_{całkowita}$.

Potrzebne nam będą jeszcze dwie dodatkowe wariancje: międzygrupowa (wyjaśniona) i wewnątrzgrupowa (niewyjaśniona). Wariancja niewyjaśniona to wariancja obliczona z wariancji w grupie chłopców i wariancji w grupie dziewcząt. Średnia arytmetyczna liczb σ^2_{ch} i σ^2_{dz} wynosi 0,215, a więc

$$\sigma^2_{niewyjaśniona} = \frac{(0,25-0,215)^2 + (0,18-0,215)^2}{2} \approx 0,02.$$

Wyniki obliczeń przedstawia Tabela 9.

Tabela 9

Wartości wariancji dla wskaźnika $\mathbf{W^p}$ *oraz* $\mathbf{W^{p'}}$ *liczone dla poszczególnych grup uczniów*

wariancja	symbol	liczba
W grupie chłopców	σ^2_{ch}	0,25
W grupie dziewcząt	σ^2_{dz}	0,18
całkowita	$\sigma^2_{całkowita}$	0,25
międzygrupowa	$\sigma^2_{wyjaśniona}$	0,23
wewnątrzgrupowa	$\sigma^2_{niewyjaśniona}$	0,02

Otrzymujemy zatem następującą wartość indeksu korelacji **I=0,92**. Ponieważ wartość indeksu jest bliska liczbie 1, to zebrane dane świadczą o korelacji płci ucznia z wykonaniem przez niego niewspierającej wizualizacji. Dokładniej, wykonanie błędnej wizualizacji może być domeną mężczyzn.

Z kolei w Tabelach 10, 11 oraz 12 podane zostały liczbowe i procentowe wartości, opisujące liczbę poprawnych oraz niepoprawnych rozwiązań zadania (w tym braku prób podjęcia jego rozwiązania).

Tabela 10

Liczba poprawnych i błędnych rozwiązań zadania w pierwszym roku badania

Ciąg	Liczba	%
$\mathbf{W^r}$	10	**45,45**
$\mathbf{W^b}$	12	**55,55**
$\mathbf{W^n}$	1	**4,55(8,33)***

*w nawiasie podano % spośród wszystkich błędnych rozwiązań

Tabela 11

Liczba poprawnych i błędnych rozwiązań zadania w drugim roku badania

Ciąg	Liczba	%
$\mathbf{W^r}$	6	**26,09**
$\mathbf{W^b}$	17	**73,91**
$\mathbf{W^n}$	0	**0(0)***

*w nawiasie podano % spośród wszystkich błędnych rozwiązań

Tabela 12

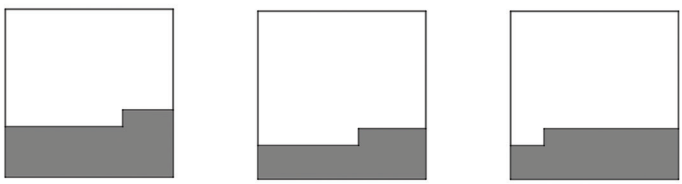
Liczba poprawnych i błędnych rozwiązań zadania w obu latach badania

Ciąg	Liczba	%
W^r	16	**35,56**
W^b	29	**64,44**
W^n	1	**2,22(3,45)***

*w nawiasie podano % spośród wszystkich błędnych rozwiązań

Tabele 10, 11, 12 wskazują, że zarówno w pierwszym, jak i w drugim roku badania odsetek błędnych rozwiązań był większy niż odsetek poprawnych rozwiązań omawianego zadania. Trzeba jednak zaznaczyć, że różnica w liczbie poprawnych i błędnych rozwiązań uległa istotnemu wzrostowi w drugim roku badania.

Na diagramie (Rysunek 5) przedstawiamy odsetek niewspierających wizualizacji wśród wszystkich błędów popełnionych przez uczniów w kolejnych latach badania oraz łącznie.



Rysunek 5. Odsetek niewspierającej wizualizacji wśród wszystkich błędnych rozwiązań uczniowskich w kolejnych latach badania (od lewej): w pierwszym roku 67%, w drugim roku 76%, łącznie w obu latach badania 72%.

Uwzględniając zebrane dane obliczamy trudność zadania w pierwszym roku badania – $\mathbf{T_1}$, drugim roku badania – $\mathbf{T_2}$ oraz w obu latach łącznie – $\mathbf{T_r}$. Ponadto obliczamy stopień potwierdzenia hipotezy $\mathbf{H_0}$: w pierwszym roku badania – $\mathbf{P_1}$, drugim roku badania – $\mathbf{P_2}$ oraz w obu latach łącznie – $\mathbf{P_r}$. Uzyskane wyniki przedstawia Tabela 13.

Tabela 13

Trudność zadania i stopień potwierdzenia hipotezy w poszczególnych latach

	Trudność zadania		Stopień potwierdzenia hipotezy $\mathbf{H_0}$
$\mathbf{T_1}$	54,55	$\mathbf{P_1}$	100
$\mathbf{T_2}$	73,91	$\mathbf{P_2}$	100
$\mathbf{T_r}$	64,44	$\mathbf{P_r}$	100

Tabela 13 wskazuje, że poziom trudności zadania wzrósł w drugim roku badania z 54,55% na 73,91%. W obu latach stopień potwierdzenia hipotezy szczegółowej $\mathbf{H_0}$ wynosił 100%, co oznacza, że każdy uczeń, który wykonał niewspierającą wizualizację (wykonał rysunek, w którym trójkąt jest ostrokątny) wykonał źle dalszą część zadania.

Analiza i wnioski z zebranych danych

Z obliczonych wartości liczbowych wskaźników wynika, że

1. Poziom potwierdzenia hipotezy $\mathbf{H_0}$ wyniósł w obu latach badania 100%, co oznacza, że każdy uczeń, który wykonał rysunek nieuwzględniający rozwartokątności trójkąta stworzył wizualizację sytuacji geometrycznej, która nie wsparła jego rozumowania i doprowadziła do niepoprawnego rozwiązania zadania. Możemy więc wysnuć wniosek, że każdy z tej grupy uczniów potraktował stworzony przez siebie rysunek jako konkret – odczytał bowiem z niego błędne założenie o umiejscowieniu środka okręgu opisanego na trójkącie.
2. Spośród uczniów, którzy przedstawili błędne bądź niepełne rozwiązanie odsetek tych, którzy wykonali niewspierającą wizualizację wyniósł odpowiednio: 67% w pierwszym roku badania, 76% w drugim roku badania oraz 72% w obu latach. Liczby te wskazują na znaczny udział tego rodzaju błędu przy rozwiązywaniu tego zadania, który może być powtórzony przy zadaniach podobnego typu.
3. Pozostałe błędy, w tym niepodjęcie próby zadania, stanowiły jedynie odpowiednio 33%, 24% oraz 28% w pierwszym, drugim oraz obu latach badania łącznie. Jest to więc zdecydowanie mniejsza grupa uczniów. Warto nadmienić, że 7 uczniów (3 i 4 odpowiednio w pierwszym i drugim roku badania) popełniło jedynie błędy formalne przy ostatnim ze wskaźników $\mathbf{W_5}$, a więc przy próbie dowodu arytmetyczności ciągu. Błędy ich rozumowania nie były więc związane z wizualizacją.
4. Uleganie błędnej wizualizacji może być powiązane z płcią – odpowiednio 95%, 91% oraz 93% w pierwszym, drugim oraz obu latach badania uczniów, którzy ulegli niewspierającej wizualizacji to chłopcy. Również indeks korelacji jest tutaj wysoki – 0,92. Ze względu na niezachowanie proporcji dziewcząt do chłopców w badanych grupach (w grupie uczniów z obu lat badania stosunek dziewcząt do chłopców wynosi 13:32) jest to jedynie luźna uwaga, która może stanowić ważną kwestię do rozważenia w przyszłych, bardziej dalekosiężnych badaniach nad tą kwestią.
5. Poziom trudności zadania w drugim roku badania wzrósł o 19 punktów procentowych w stosunku do pierwszego roku. Jest jednak wiele czynników, które mogły go spowodować i nie wydaje się, aby można było je uchwycić.

Podsumowanie

Wykonane badanie, w małym choć obrazowym stopniu, wykazało empirycznie prawdziwość hipotezy:

$\mathbf{H_0}$**:** *Wykonanie rysunku pomocniczego nieuwzględniającego rozwartokątności trójkąta prowadzi do zmiany charakteru rysunku pomocniczego i jest wizualizacją prowadzącą do błędnego rozwiązania zadania.*

Stuprocentowy poziom potwierdzenia tej hipotezy, jak i odsetek uczniów, których niepowodzenie w wykonaniu zadania polegało na popełnieniu sformułowanego w hipotezie błędu wskazuje na znaczący udział tego rodzaju błędu i jest przyczynkiem do próby dowiedzenia ogólniejszej hipotezy

> **H:** *Wykonanie rysunku poglądowego nieuwzględniającego założeń zadania prowadzi do zmiany charakteru rysunku pomocniczego i jest wizualizacją niewspierającą procesu rozumowania ucznia podczas rozwiązywania konkretnego problemu matematycznego*,

której empiryczne wykazanie byłoby próbą opisania powodów braku wspierania procesu rozumowania przez proces wizualizacji w opisanych przez R. Duvala zależnościach pomiędzy procesami kognitywnymi w nauczaniu geometrii (Duval, 1998). Wiąże to opisane przez S. Turnaua spojrzenie na rysunek w nauczaniu geometrii wraz z jego uwagami dotyczącymi sporządzania i dokładności takich rysunków. Wydaje się być to jednym z możliwych obszarów do badań nad błędami popełnianymi przez uczniów w trakcie procesu nauczania – uczenia się matematyki i próbą scharakteryzowania tych błędów, które są błędami wynikającymi z braku wspierania się procesów poznawczych. Wymaga to skompletowania pewnego zbioru zadań i działań do wykonania przez ucznia, które angażowałyby procesy kognitywne opisane w schemacie (Rysunek 1) oraz dałoby się zaobserwować w nich możliwość stworzenia niewspierającej wizualizacji.

Literatura

Aebli, H. (1982). *Dydaktyka psychologiczna.* Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Czajkowska, M. (2018). Problemy modyfikowania źle ukształtowanych reprezentacji pojęć geometrycznych przyszłych nauczycieli. *Edukacja, 1*(144), 50–68.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. W: C. Mammana i V. Villani (red.), *Perspectives on the teaching geometry for the 21st century* (s. 37–52). Dordrecht: Springer. Kluwer Academic Publishers.

Kozuh, B. (2011). *Statystyka dla pedagogów*. Kraków: Oficyna Wydawnicza AFM.

Krygowska, Z. (1972). Geometria. W: G. Treliński i H. Siwek (red.), *Modernizacja kształcenia matematycznego i jej wpływ na rozwój dydaktyki matematyki. Wybór artykułów Anny Zofii Krygowskiej z lat 1958-1972* (s. 136–160). Kraków: Wydawnictwo Naukowe WSP.

Nowak, W. (1981). Wybrane zagadnienia metodologii badań dydaktyki matematyki. *Dydaktyka matematyki*, *1*, 60–125.

Turnau, S. (1977). *Nauczanie geometrii w klasach I i II szkoły średniej*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Centralna Komisja Egzaminacyjna (2014). Egzamin maturalny z matematyki. Poziom rozszerzony. Pobrano z https://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_MATURALNY_OD_2015/Arkusze_egzaminacyjne/2014/matematyka_PR_A1.pdf

When visualisation does not support reasoning – the case of a specific mathematics task

In the discussion about the methods and the effects of teaching mathematics in secondary school, it is worth looking at the types of student mistakes made during the teaching-learning process. The starting point for such an analysis is to review one situation in which the process of visualisation, as one of the cognitive processes involved in learning geometry, does not support the process of reasoning. We analysed two groups of secondary school students' solutions over two consecutive years. Our purpose was to examine the degree of confirmation of the hypothesis that making an auxiliary drawing that does not take into account the conditions of the task leads to a change in the nature of the drawing, resulting in an incorrect solution to the task. Students' solutions empirically confirm this hypothesis. We also show a possible link between making such errors and the gender of the student.

Keywords: cognitive processes in teaching geometry, didactics of mathematics, problems in teaching geometry, role of a drawing in teaching geometry, teaching mathematics in high school.